

1  $\triangle ABC$ において、 $AB=2\sqrt{2}$ 、 $AC=\sqrt{5}$ 、 $\angle ABC=45^\circ$ とする。  
このとき  $BC=\boxed{\text{ア}}$  または  $BC=\boxed{\text{イ}}$  である。ただし、 $\boxed{\text{ア}} < \boxed{\text{イ}}$  とする。

以下、 $BC=\boxed{\text{イ}}$  の場合を考える。

(1) 点  $C$  から辺  $AB$  に下ろした垂線と辺  $AB$  との交点を  $D$  とすると

$$BD = \frac{\boxed{\text{ウ}} \sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}} \text{ である。}$$

また、 $\triangle ADC$  の外接円と辺  $BC$  との交点で点  $C$  とは異なる点を  $E$  とすると、  
 $\angle AEB = \boxed{\text{カキ}}^\circ$  であるから、 $BE = \boxed{\text{ク}}$  である。

(2)  $\triangle ABC$  の外接円の中心を  $O$  とすると、 $BO = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ケコ}}}}{\boxed{\text{サ}}}$  である。

次の  $\boxed{\text{シ}}$  には下の ① ~ ③ から、 $\boxed{\text{タ}}$  には下の ④ ~ ⑦ から当てはまるもの一つずつ選べ。

$\triangle BDE$  と  $\triangle BCA$  において、 $\frac{BE}{BA} = \frac{BD}{BC}$  であり、 $\angle ABC$  は共通であるから

$$\angle BCA = \angle \boxed{\text{シ}}, \quad DE = \frac{\sqrt{\boxed{\text{スセ}}}}{\boxed{\text{ソ}}} \text{ である。}$$

直線  $BO$  と  $\triangle ABC$  の外接円との交点で点  $B$  とは異なる点を  $P$  とすると、

$\angle ACP = \angle \boxed{\text{タ}}$  である。

- ①  $BED$       ②  $BDE$       ③  $BOA$       ④  $BAC$   
⑤  $ADC$       ⑥  $CAP$       ⑦  $AOP$       ⑧  $ABP$

また、 $\angle BCP = \boxed{\text{チツ}}^\circ$  である。

したがって、線分  $BP$  と線分  $DE$  との交点を  $Q$  とすると、 $\angle BCA + \angle ACP = \angle BCP$  であることから、 $\angle BQD = \boxed{\text{テト}}^\circ$  であることがわかる。

よって、 $\triangle BOD$  の面積と  $\triangle BOE$  の面積の和は  $\frac{\boxed{\text{ナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$  である。

2  $\triangle ABC$ において、 $AB=\frac{\sqrt{5}}{5}$ 、 $AC=\frac{1}{3}$ 、 $\sin \angle ACB = \frac{3}{5}$  とする。

(1)  $\triangle ABC$  の外接円の半径は  $\frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$  である。

$$\cos \angle ACB = \pm \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \text{ であるから、} BC = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カキ}}} \text{ または } BC = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \text{ である。}$$

(2) 以下では  $BC = \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$  とする。

$$\text{このとき、} \tan \angle ACB = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}, \quad \cos \angle BAC = \frac{\boxed{\text{シ}} \sqrt{\boxed{\text{ス}}}}{\boxed{\text{セ}}} \text{ である。また、}$$

$$\triangle ABC \text{ の面積は } \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タチ}}} \text{ である。}$$

$\triangle ABC$  の外接円の、点  $A$  での接線と点  $B$  での接線の交点を  $P$  とし、点  $A$  での接線と点  $C$  での接線の交点を  $Q$  とする。 $\triangle ABC$  の外接円の中心を  $O$  とし、線分  $OP$  と辺  $AB$  の交点を  $R$ 、線分  $OQ$  と辺  $AC$  の交点を  $S$  とする。このとき、 $\angle AOB$  と  $\angle ACB$

$$\text{の関係から } \tan \angle AOP = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}, \quad AP = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}} \text{ である。}$$

$$\text{また、四角形 } ORAS \text{ の内角 } \angle ROS \text{ については、} \cos \angle ROS = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \text{ である。}$$