$\boxed{1}$ 連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1 & \cdots\cdots ① \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^y-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす実数 x，y を求めよう。

真数の条件により，x，y のとり得る値の範囲は $\boxed{\text{ア}}$ である。$\boxed{\text{ア}}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

⓪ $x>0$，$y>0$　① $x>2$，$y>3$　② $x>-2$，$y>-3$

③ $x<0$，$y<0$　④ $x<2$，$y<3$　⑤ $x<-2$，$y<-3$

底の変換公式により $\log_4(y+3)=\dfrac{\log_2(y+3)}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

よって，① から

$$y=\boxed{\text{ウ}}x+\boxed{\text{エ}} \quad \cdots\cdots ③$$

が得られる。

次に，$t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ とおき，③ を用いて ② を t の方程式に書き直すと

$$t^2-\boxed{\text{オカ}}t+\boxed{\text{キク}}=0 \quad \cdots\cdots ④$$

が得られる。また，x が $\boxed{\text{ア}}$ における x の範囲を動くとき，t のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{ケ}}<t<\boxed{\text{コ}} \quad \cdots\cdots ⑤$$

である。

⑤ の範囲で方程式 ④ を解くと，$t=\boxed{\text{サ}}$ となる。したがって，連立方程式 ①，② を満たす実数 x，y の値は

$$x=\log_3\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}, \quad y=\log_3\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

であることがわかる。

$\boxed{2}$ 不等式 $4\{\log_2(3-\sqrt{x})\}^2+3\log_{\frac{1}{8}}(3-\sqrt{x})^2-2>0$ ……① を満たす x のとり得る値の範囲を求めよう。

まず，真数は正であるから $0\leqq x<\boxed{\text{ア}}$ ……② である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，a を底といい，b を真数という。

$y=\log_{\frac{1}{8}}(3-\sqrt{x})^2$ とおくと，$\left(\dfrac{1}{8}\right)^y=(3-\sqrt{x})^2$ である。2 を底とする両辺の対数をとれば $y=-\dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\log_2(3-\sqrt{x})$ であることがわかる。

よって，$X=\log_2(3-\sqrt{x})$ とおくと，① は $\boxed{\text{エ}}X^2-X-1>0$ ……③ と表すことができる。

不等式 ③ を解くと $X<-\dfrac{1}{\boxed{\text{オ}}}$，$X>\boxed{\text{カ}}$ となり，$X=\log_2(3-\sqrt{x})$ により

$3-\sqrt{x}<\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$，$3-\sqrt{x}>\boxed{\text{ケ}}$ ……④ であることがわかる。② と ④ から，不等式 ① を満たす x のとり得る値の範囲は

$$0\leqq x<\boxed{\text{コ}},\quad \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}-\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}<x<\boxed{\text{ア}}$$

である。