1 連立方程式

$$\begin{cases} \log_2(x+2)-2\log_4(y+3)=-1 & \cdots\cdots ① \\ \left(\dfrac{1}{3}\right)^y-11\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+1}+6=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

を満たす実数 $x$，$y$ を求めよう。

真数の条件により，$x$，$y$ のとり得る値の範囲は $\boxed{ア}$ である。$\boxed{ア}$ に当てはまるものを，次の ⓪～⑤ のうちから一つ選べ。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，$a$ を底といい，$b$ を真数という。

⓪ $x>0$，$y>0$　① $x>2$，$y>3$　② $x>-2$，$y>-3$

③ $x<0$，$y<0$　④ $x<2$，$y<3$　⑤ $x<-2$，$y<-3$

底の変換公式により $\log_4(y+3)=\dfrac{\log_2(y+3)}{\boxed{イ}}$ である。

よって，① から

$$y=\boxed{ウ}x+\boxed{エ} \quad \cdots\cdots ③$$

が得られる。

次に，$t=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ とおき，③ を用いて ② を $t$ の方程式に書き直すと

$$t^2-\boxed{オカ}t+\boxed{キク}=0 \quad \cdots\cdots ④$$

が得られる。また，$x$ が $\boxed{ア}$ における $x$ の範囲を動くとき，$t$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{ケ}<t<\boxed{コ} \quad \cdots\cdots ⑤$$

である。

⑤ の範囲で方程式 ④ を解くと，$t=\boxed{サ}$ となる。したがって，連立方程式 ①，② を満たす実数 $x$，$y$ の値は

$$x=\log_3\frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}, \quad y=\log_3\frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}$$

であることがわかる。

解答 （ア） ②　（イ） 2　（ウ） 2　（エ） 1　（オカ） 11　（キク） 18

（ケ） 0　（コ） 9　（サ） 2　$\dfrac{（シ）}{（ス）}$ $\dfrac{1}{2}$　$\dfrac{（セ）}{（ソ）}$ $\dfrac{3}{4}$

2 不等式 $4\{\log_2(3-\sqrt{x})\}^2+3\log_{\frac{1}{8}}(3-\sqrt{x})^2-2>0$ …… ① を満たす $x$ のとり得る値の範囲を求めよう。

まず，真数は正であるから $0\leqq x<\boxed{ア}$ …… ② である。ただし，対数 $\log_a b$ に対し，$a$ を底といい，$b$ を真数という。

$y=\log_{\frac{1}{8}}(3-\sqrt{x})^2$ とおくと，$\left(\dfrac{1}{8}\right)^y=(3-\sqrt{x})^2$ である。2 を底とする両辺の対数をとれば $y=-\dfrac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\log_2(3-\sqrt{x})$ であることがわかる。

よって，$X=\log_2(3-\sqrt{x})$ とおくと，① は $\boxed{エ}X^2-X-1>0$ …… ③ と表すことができる。

不等式 ③ を解くと $X<-\dfrac{1}{\boxed{オ}}$，$X>\boxed{カ}$ となり，$X=\log_2(3-\sqrt{x})$ により

$3-\sqrt{x}<\dfrac{\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}}$，$3-\sqrt{x}>\boxed{ケ}$ …… ④ であることがわかる。② と ④ から，不等式 ① を満たす $x$ のとり得る値の範囲は

$$0\leqq x<\boxed{コ},\quad \frac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}-\boxed{セ}\sqrt{\boxed{キ}}<x<\boxed{ア}$$

である。

解答 （ア） 9　$\dfrac{（イ）}{（ウ）}$ $\dfrac{2}{3}$　（エ） 2　（オ） 2　（カ） 1　$\dfrac{\sqrt{（キ）}}{（ク）}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（ケ） 2　（コ） 1　$\dfrac{（サシ）}{（ス）}$ $\dfrac{19}{2}$　（セ） 3