$\boxed{1}$ p，q を実数とし，関数 $f(x)=x^3+px^2+qx$ は $x=-1$ で極値 2 をとるとする。また，座標平面上の曲線 $y=f(x)$ を C，放物線 $y=-kx^2$ を D，放物線 D 上の点 $(a,\ -ka^2)$ を A とする。ただし，$k>0$，$a>0$ である。

(1) 関数 $f(x)$ が $x=-1$ で極値をとるので，$f'(-1)=\boxed{ア}$ である。これと

$f(-1)=2$ より，$p=\boxed{イ}$，$q=\boxed{ウエ}$ である。よって，$f(x)$ は $x=\boxed{オ}$ で極小

値 $\boxed{カキ}$ をとる。

(2) 点 A における放物線 D の接線を ℓ とする。D と ℓ および x 軸で囲まれた図形の面積 S を a と k を用いて表そう。

ℓ の方程式は

$$y=\boxed{クケ}kax+ka^{\boxed{コ}} \quad \cdots\cdots ①$$

と表せる。ℓ と x 軸の交点の x 座標は $\dfrac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}$ であり，D と x 軸および直線 $x=a$ で囲

まれた図形の面積は $\dfrac{k}{\boxed{ス}}a^{\boxed{セ}}$ である。よって，$S=\dfrac{k}{\boxed{ソタ}}a^{\boxed{セ}}$ である。

(3) さらに，点 A が曲線 C 上にあり，かつ (2) の接線 ℓ が C にも接するとする。

このときの (2) の S の値を求めよう。

A が C 上にあるので，$k=\dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツ}}-\boxed{テ}$ である。

ℓ と C の接点の x 座標を b とすると，ℓ の方程式は b を用いて

$$y=\boxed{ト}\left(b^2-\boxed{ナ}\right)x-\boxed{ニ}b^3 \quad \cdots\cdots ②$$

と表される。② の右辺を $g(x)$ とおくと

$$f(x)-g(x)=\left(x-\boxed{ヌ}\right)^2\left(x+\boxed{ネ}b\right)$$

と因数分解されるので，$a=-\boxed{ネ}b$ となる。① と ② の表す直線の傾きを比較する

ことにより，$a^2=\dfrac{\boxed{ノハ}}{\boxed{ヒ}}$ である。

したがって，求める S の値は $\dfrac{\boxed{フ}}{\boxed{ヘホ}}$ である。

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)$ は $x\geqq 1$ の範囲でつねに $f(x)\leqq 0$ を満たすとする。

$t>1$ のとき，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=1$，$x=t$ で囲まれた図形の面積を W とする。

t が $t>1$ の範囲を動くとき，W は，底辺の長さが $2t^2-2$，他の 2 辺の長さがそれぞれ t^2+1 の二等辺三角形の面積とつねに等しいとする。

このとき，$x>1$ における $f(x)$ を求めよう。

$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分とする。

一般に，$F'(x)=\boxed{ア}$，$W=\boxed{イ}$ が成り立つ。$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$ に当てはまるものを，次の ⓪ ～ ⑧ のうちから一つずつ選べ。ただし，同じものを選んでもよい。

⓪ $-F(t)$	① $F(t)$	② $F(t)-F(1)$
③ $F(t)+F(1)$	④ $-F(t)+F(1)$	⑤ $-F(t)-F(1)$
⑥ $-f(x)$	⑦ $f(x)$	⑧ $f(x)-f(1)$

したがって，$t>1$ において $f(t)=\boxed{ウエ}t^{\boxed{オ}}+\boxed{カ}$ である。

よって，$x>1$ における $f(x)$ がわかる。