1 四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。四角形 ABCD は，辺 AD と辺 BC が平行で，AB＝CD，∠ABC＝∠BCD を満たすとする。

さらに，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ として

$$|\vec{a}|=1,\quad |\vec{b}|=\sqrt{3},\quad |\vec{c}|=\sqrt{5}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=3,\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

であるとする。

(1) $\angle AOC=\boxed{アイ}^\circ$ により，三角形 OAC の面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{ウ}}}{\boxed{エ}}$ である。

(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\boxed{オカ}$，$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{\boxed{キ}}$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\boxed{ク}}$ であるから，

$\angle ABC=\boxed{ケコサ}^\circ$ である。さらに，辺 AD と辺 BC が平行であるから，

$\angle BAD=\angle ADC=\boxed{シス}^\circ$ である。よって，$\overrightarrow{AD}=\boxed{セ}\,\overrightarrow{BC}$ であり

$$\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\boxed{ソ}\,\vec{b}+\boxed{タ}\,\vec{c}$$

と表される。また，四角形 ABCD の面積は $\dfrac{\boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}}{\boxed{テ}}$ である。

(3) 三角形 OAC を底面とする三角錐 BOAC の体積 V を求めよう。

3 点 O，A，C の定める平面 α 上に，点 H を $\overrightarrow{BH}\perp\vec{a}$ と $\overrightarrow{BH}\perp\vec{c}$ が成り立つようにとる。

$|\overrightarrow{BH}|$ は三角錐 BOAC の高さである。H は α 上の点であるから，実数 s，t を用いて

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{c}$ の形に表される。

$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{a}=\boxed{ト}$，$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{c}=\boxed{ト}$ により，$s=\boxed{ナ}$，$t=\dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$

である。よって，$|\overrightarrow{BH}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{ネ}}}{\boxed{ノ}}$ が得られる。したがって，(1) により，

$V=\dfrac{\boxed{ハ}}{\boxed{ヒ}}$ であることがわかる。

(4) (3) の V を用いると，四角錐 OABCD の体積は $\boxed{フ}\,V$ と表せる。さらに，

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD の高さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{ヘ}}}{\boxed{ホ}}$ である。

2 a を $0<a<1$ を満たす定数とする。三角形 ABC を考え，辺 AB を 1 : 3 に内分する点を D，辺 BC を $a:(1-a)$ に内分する点を E，直線 AE と直線 CD の交点を F とする。

$\overrightarrow{FA}=\vec{p}$，$\overrightarrow{FB}=\vec{q}$，$\overrightarrow{FC}=\vec{r}$ とおく。

(1) $\overrightarrow{AB}=\boxed{ア}$ であり $|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{p}|^2-\boxed{イ}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$ …… ① である。ただし，

$\boxed{ア}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ $\vec{p}+\vec{q}$　① $\vec{p}-\vec{q}$　② $\vec{q}-\vec{p}$　③ $-\vec{p}-\vec{q}$

(2) $\overrightarrow{FD}$ を $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を用いて表すと $\overrightarrow{FD}=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{p}+\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{q}$ …… ② である。

(3) s，t をそれぞれ $\overrightarrow{FD}=s\vec{r}$，$\overrightarrow{FE}=t\vec{p}$ となる実数とする。s と t を a を用いて表そう。

$\overrightarrow{FD}=s\vec{r}$ であるから，② により $\vec{q}=\boxed{キク}\,\vec{p}+\boxed{ケ}\,s\vec{r}$ …… ③ である。

また，$\overrightarrow{FE}=t\vec{p}$ であるから $\vec{q}=\dfrac{t}{\boxed{コ}-\boxed{サ}}\vec{p}-\dfrac{\boxed{シ}}{\boxed{コ}-\boxed{サ}}\vec{r}$ …… ④ である。

③ と ④ により $s=\dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソ}\left(\boxed{コ}-\boxed{サ}\right)}$，$t=\boxed{タチ}\left(\boxed{コ}-\boxed{サ}\right)$ である。

(4) $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BE}|$ とする。$|\vec{p}|=1$ のとき，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ の内積を a を用いて表そう。

① により $|\overrightarrow{AB}|^2=1-\boxed{イ}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$ である。

また $|\overrightarrow{BE}|^2=\boxed{ツ}\left(\boxed{コ}-\boxed{サ}\right)^2+\boxed{テ}\left(\boxed{コ}-\boxed{サ}\right)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$ である。

したがって $\vec{p}\cdot\vec{q}=\dfrac{\boxed{トナ}-\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ である。