$\boxed{1}$ 四角形ABCDを底面とする四角錐OABCDを考える。四角形ABCDは，辺ADと辺BCが平行で，AB＝CD，∠ABC＝∠BCDを満たすとする。

さらに，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$として

$$|\vec{a}|=1,\quad |\vec{b}|=\sqrt{3},\quad |\vec{c}|=\sqrt{5}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1,\quad \vec{b}\cdot\vec{c}=3,\quad \vec{a}\cdot\vec{c}=0$$

であるとする。

(1) $\angle AOC=\boxed{\text{アイ}}^\circ$ により，三角形OACの面積は $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}}{\boxed{\text{エ}}}$ である。

(2) $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=\boxed{\text{オカ}}$，$|\overrightarrow{BA}|=\sqrt{\boxed{\text{キ}}}$，$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$ であるから，

$\angle ABC=\boxed{\text{ケコサ}}^\circ$ である。さらに，辺ADと辺BCが平行であるから，

$\angle BAD=\angle ADC=\boxed{\text{シス}}^\circ$ である。よって，$\overrightarrow{AD}=\boxed{\text{セ}}\,\overrightarrow{BC}$ であり

$$\overrightarrow{OD}=\vec{a}-\boxed{\text{ソ}}\,\vec{b}+\boxed{\text{タ}}\,\vec{c}$$

と表される。また，四角形ABCDの面積は $\dfrac{\boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}{\boxed{\text{テ}}}$ である。

(3) 三角形OACを底面とする三角錐BOACの体積 V を求めよう。

3点O，A，Cの定める平面 α 上に，点Hを $\overrightarrow{BH}\perp\vec{a}$ と $\overrightarrow{BH}\perp\vec{c}$ が成り立つようにとる。

$|\overrightarrow{BH}|$ は三角錐BOACの高さである。Hは α 上の点であるから，実数 s，t を用いて

$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{c}$ の形に表される。

$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{a}=\boxed{\text{ト}}$，$\overrightarrow{BH}\cdot\vec{c}=\boxed{\text{ト}}$ により，$s=\boxed{\text{ナ}}$，$t=\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$

である。よって，$|\overrightarrow{BH}|=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ネ}}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ が得られる。したがって，(1)により，

$V=\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒ}}}$ であることがわかる。

(4) (3)の V を用いると，四角錐OABCDの体積は $\boxed{\text{フ}}\,V$ と表せる。さらに，

四角形ABCDを底面とする四角錐OABCDの高さは $\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ヘ}}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ である。

解答 （アイ）90　$\dfrac{\sqrt{(\text{ウ})}}{(\text{エ})}$ $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　（オカ）-1　$\sqrt{(\text{キ})}$ $\sqrt{2}$　$\sqrt{(\text{ク})}$ $\sqrt{2}$

（ケコサ）120　（シス）60　（セ）2　（ソ）2　（タ）2

$\dfrac{(\text{チ})\sqrt{(\text{ツ})}}{(\text{テ})}$ $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$　（ト）0　（ナ）1　$\dfrac{(\text{ニ})}{(\text{ヌ})}$ $\dfrac{3}{5}$　$\dfrac{\sqrt{(\text{ネ})}}{(\text{ノ})}$ $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\dfrac{(\text{ハ})}{(\text{ヒ})}$ $\dfrac{1}{6}$　（フ）3　$\dfrac{\sqrt{(\text{ヘ})}}{(\text{ホ})}$ $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\boxed{2}$ a を $0<a<1$ を満たす定数とする。三角形 ABC を考え，辺 AB を $1:3$ に内分する点を D，辺 BC を $a:(1-a)$ に内分する点を E，直線 AE と直線 CD の交点を F とする。
$\overrightarrow{FA}=\vec{p}$，$\overrightarrow{FB}=\vec{q}$，$\overrightarrow{FC}=\vec{r}$ とおく。

(1)　$\overrightarrow{AB}=\boxed{\text{ア}}$ であり $|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{p}|^2-\boxed{\text{イ}}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$ …… ① である。ただし，$\boxed{\text{ア}}$ については，当てはまるものを，次の ⓪ ～ ③ のうちから一つ選べ。

⓪ $\vec{p}+\vec{q}$　　① $\vec{p}-\vec{q}$　　② $\vec{q}-\vec{p}$　　③ $-\vec{p}-\vec{q}$

(2)　$\overrightarrow{FD}$ を $\vec{p}$ と $\vec{q}$ を用いて表すと $\overrightarrow{FD}=\dfrac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\vec{p}+\dfrac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\vec{q}$ …… ② である。

(3)　s，t をそれぞれ $\overrightarrow{FD}=s\vec{r}$，$\overrightarrow{FE}=t\vec{p}$ となる実数とする。s と t を a を用いて表そう。
$\overrightarrow{FD}=s\vec{r}$ であるから，② により $\vec{q}=\boxed{\text{キク}}\,\vec{p}+\boxed{\text{ケ}}\,s\vec{r}$ …… ③ である。

また，$\overrightarrow{FE}=t\vec{p}$ であるから $\vec{q}=\dfrac{t}{\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}}\vec{p}-\dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}}\vec{r}$ …… ④ である。

③ と ④ により $s=\dfrac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)}$，$t=\boxed{\text{タチ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)$ である。

(4)　$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BE}|$ とする。$|\vec{p}|=1$ のとき，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ の内積を a を用いて表そう。
① により $|\overrightarrow{AB}|^2=1-\boxed{\text{イ}}\,\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$ である。

また $|\overrightarrow{BE}|^2=\boxed{\text{ツ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)^2+\boxed{\text{テ}}\left(\boxed{\text{コ}}-\boxed{\text{サ}}\right)\vec{p}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2$ である。

したがって $\vec{p}\cdot\vec{q}=\dfrac{\boxed{\text{トナ}}-\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である。

解答　（ア）②　（イ）2　$\dfrac{(\text{ウ})}{(\text{エ})}$ $\dfrac{3}{4}$　$\dfrac{(\text{オ})}{(\text{カ})}$ $\dfrac{1}{4}$　（キク）-3　（ケ）4
（コ）1　（サ）a　（シ）a　（スセ）$-a$　（ソ）4　（タチ）-3
（ツ）9　（テ）6　$\dfrac{(\text{トナ})-(\text{ニ})}{(\text{ヌ})}$ $\dfrac{3a-2}{2}$