

□1 $b = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $c = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ とする。数列 $\{a_n\}$ の一般項が $a_n = b^n + c^n$ で与えられるとき、

次の問いに答えよ。

- (1) a_1, a_2 を求めよ。
- (2) $a_{n+2} - a_{n+1}$ を a_n を用いて表せ。
- (3) (2) で得られた結果を用いて a_5 を求めよ。
- (4) 自然数 n に対して $\sin(2\pi a_n)$, $\cos(2\pi a_n)$ を求めよ。
- (5) 極限 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi c^n)}{b^n}$ を求めよ。
- (6) 極限 $T = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(2\pi b^n)}{c^n}$ を求めよ。

□解答 (1) $a_1 = 1, a_2 = 3$ (2) $a_{n+2} - a_{n+1} = a_n$ (3) $a_5 = 11$
 (4) $\sin(2\pi a_n) = 0, \cos(2\pi a_n) = 1$ (5) 0 (6) -2π

□2 n を自然数とし、 $S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$ とする。

- (1) $x > 0$ のとき $\frac{1}{2\sqrt{x+1}} < \sqrt{x+1} - \sqrt{x} < \frac{1}{2\sqrt{x}}$ を示せ。
- (2) $n \geq 2$ のとき $2(\sqrt{n+1} - 1) < S_n < 2\sqrt{n} - 1$ を示せ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}}$ を求めよ。

□解答 (1) 略 (2) 略 (3) 2