

1 次の定積分の値を求めよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) $\int_0^1 \frac{x}{(2x+1)^3} dx$ (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cos^4 x dx$ (3) $\int_1^e \sqrt{x} \log x dx$

解答 (1) $\frac{1}{18}$ (2) $\frac{2}{35}$ (3) $\frac{2}{9}e^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{9}$

2 n は自然数とし、微分可能な関数 $f_n(x)$ は等式 $f_n(x) = e^{-x}x^{n+1} + \int_0^x e^{-t}f_n(x-t)dt$ を満たすとする。このとき、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) $\frac{d}{dx}f_n(x)$ を求めよ。

(2) m は 2 以上の自然数とする。 $x > 0$ のとき、不等式 $e^{-x}x^m \leq e^{-m}m^m$ が成り立つことを示せ。

(3) 極限值 $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x)$ を求めよ。

解答 (1) $\frac{d}{dx}f_n(x) = (n+1)e^{-x}x^n$ (2) 略 (3) $\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = (n+1)!$